



## دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی مرحله اول

### بیست و پنجمین دوره المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۳

| مدت آزمون<br>(دقیقه) | تعداد سؤالات     |                     |
|----------------------|------------------|---------------------|
|                      | مساله‌های تشریحی | سؤالات چند گزینه‌ای |
| ۱۸۰                  | -                | ۳۰                  |

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

#### تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

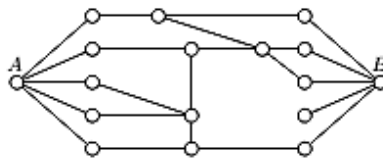
- این آزمون شامل ۳۰ سؤال چند گزینه‌ای و وقت آن ۱۸۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط کمیته‌ی اجرایی ماخ انجام شده است.

- سؤال‌های ۲۴ تا ۳۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز تمامی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سوال چهار نمره مثبت و جواب نادرست یک نمره منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

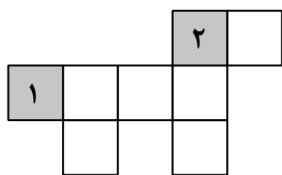
۱- به چند طریق می‌توان در یک جدول  $3 \times 3$  دو مهره‌ی شاه با رنگ‌های سیاه و سفید گذاشت طوری که همدیگر را تهدید نکنند؟

- الف) ۹      ب) ۱۲      ج) ۴۸      د) ۳۲      ه) ۱۶

۲- در شکل مقابل می‌خواهیم با حذف تعدادی از پاره‌خط‌ها به حالتی برسیم که دیگر مسیری از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B وجود نداشته باشد. حداقل چند پاره خط باید حذف شوند؟

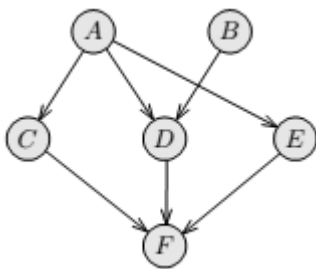


- الف) ۱      ب) ۵      ج) ۴      د) ۲      ه) ۳



۳- در جدول مقابل می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را به گونه‌ای قرار دهیم که اعداد در هر سطر از چپ به راست صعودی و در هر ستون از بالا به پایین صعودی باشند. اگر مکان قرار گرفتن اعداد ۱ و ۲ در جدول مطابق شکل مقابل باشد، بقیه‌ی اعداد را به چند طریق می‌توان در جدول چید؟ دقت کنید که دو خانه‌ی پایینی جدول در یک سطر قرار دارند.

- الف) ۲۴      ب) ۱۲      ج) ۳۲      د) ۳۶      ه) ۱۸



۴- شش درس با نام‌های A تا F داریم که روابط پیش‌نیازی آن‌ها در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر درس X پیش‌نیاز درس Y باشد، آنگاه پیکانی از X به Y در این شکل رسم شده است. می‌خواهیم این شش درس را در شش ترم متوالی و در هر ترم یک درس بگیریم طوری که تمامی روابط پیش‌نیازی رعایت شده باشند، یعنی اگر درس X پیش‌نیاز درس Y است، آنگاه درس X باید پیش از درس Y گرفته شود. به چند ترتیب مختلف می‌توان درس‌ها را با رعایت روابط پیش‌نیازی گرفت؟ به طور مثال، ترتیب  $\langle A, B, D, E, C, F \rangle$  یک ترتیب مجاز است.

- الف) ۱۸      ب) ۸      ج) ۱۰      د) ۱۴      ه) ۲۴

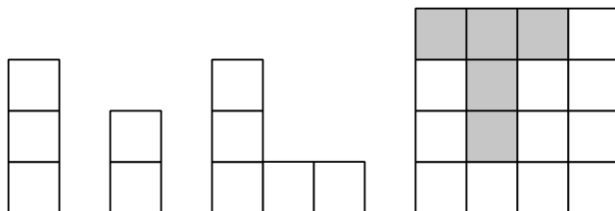
۵- در ایستگاه تاکسی موصل به صلاح‌الدین، مردم برای استفاده از تاکسی در صف می‌ایستند. به محض آمدن یک تاکسی، اگر تعداد افراد صف حداقل چهار نفر بود، ۴ نفر جلوی صف و در غیر این صورت تمام افراد صف در تاکسی می‌نشینند و تاکسی بلافاصله حرکت می‌کند. سه تروریست می‌خواهند از موصل به صلاح‌الدین بروند. آن‌ها یک تفنگ دارند و می‌توانند با هر تیر آن، یک نفر از افراد دیگر صف را بکشند. این سه تروریست هم‌زمان به انتهای صف رسیده و می‌خواهند حتماً با هم در یک تاکسی بنشینند. قبل از آن که آن‌ها به ایستگاه تاکسی بروند، می‌خواهند تعدادی تیر با خود بردارند که بتوانند به طور تضمینی، به هدفشان (نشستن با هم در تاکسی) برسند. آن‌ها حداقل چند تیر باید با خود بیاورند؟

- الف) ۲      ب) ۴      ج) ۱      د) ۳      ه) ۰

۶- دو تاس در اختیار داریم. پس از پرتاب آن‌ها به اندازه‌ی ضرب دو عددی که روی تاس‌ها آمده امتیاز می‌گیریم. اگر هر تاس با احتمال یکسان عددی بین ۱ تا ۶ بیاورد، به صورت میانگین چه امتیازی می‌توانیم کسب کنیم؟

- الف)  $10/25$  (ب) ۹ (ج)  $12/25$  (د)  $13/5$  (ه)  $12/5$

۷- به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی (سفید رنگ) جدول  $4 \times 4$  پایین سمت راست را با قطعاتی که در شکل پایین سمت چپ می‌بینید پر کرد، طوری که هر خانه توسط دقیقاً یک قطعه پوشیده شود و قطعه‌های استفاده شده به طور کامل درون خانه‌های سفید جدول قرار بگیرند؟ از هر قطعه به تعداد دلخواه وجود دارد و قطعات را می‌توان چرخاند یا دوران داد.

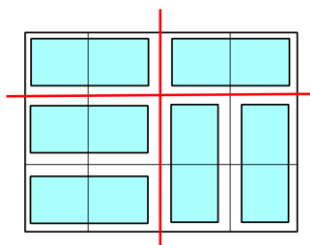


- الف) ۳ (ب) ۲ (ج) ۵ (د) ۱ (ه) ۴

۸- امروز بانک شهر فسقلی‌ها ۵۰ مشتری دارد. مشتری‌ها در یک صف ایستاده‌اند و هر کدام کارتی دارد که نوبت او را مشخص می‌کند (عددی بین ۱ تا ۵۰). این بانک سه باجه برای پاسخ‌گویی دارد و هر مشتری اگر نوبت به او برسد می‌تواند به یکی از این سه باجه مراجعه کند. ساعت ۱۲ ظهر است و هم‌اکنون به ترتیب در سه باجه نوبت مشتری‌های ۴۴، ۴۸ و ۵۰ است. این ۵۰ مشتری به چند طریق از سه باجه می‌توانند استفاده کرده باشند؟

- الف)  $3^{43} \times 2^3$  (ب)  $3^{47}$  (ج)  $3^{44} \times 2^4$  (د)  $3^{43} \times 2^4$  (ه)  $3^{44} \times 2^3$

۹- یک جدول  $10 \times 21$  را با کاشی‌هایی به شکل مستطیل‌های  $2 \times 1$  فرش کرده‌ایم. حداکثر چند خط می‌توان روی خطوط داخل این جدول رسم کرد که هیچ یک از کاشی‌ها را قطع نکنند؟ به طور مثال در جدول  $3 \times 4$  رو به رو تنها دو خط قابل رسم است، ولی اگر همه‌ی کاشی‌ها را افقی قرار دهیم، تعداد خطوط قابل رسم ۳ خواهد بود که بیشترین مقدار ممکن است.



- الف) ۲۰ (ب) ۱۵ (ج) ۲۲ (د) ۲۷ (ه) ۲۴

۱۰- در یک دنیا ۱۶ کشور با شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. هر کشور با شماره‌ی  $x$ ، با کشورهای  $x-1$ ،  $x+1$ ،  $x-4$ ،  $x+4$ ،  $x$  (در صورت وجود) رابطه‌ی اقتصادی دارد. برای نمونه، کشور ۷ با کشورهای ۳، ۶، ۸، ۱۱ و کشور ۲ با کشورهای ۱، ۳ و ۶ رابطه دارد. سه تا از کشورها یک اتحادیه تشکیل داده‌اند. هر سال هر کشوری که با دست کم دو تا از کشورهای اتحادیه رابطه‌ی اقتصادی داشته باشد، به اتحادیه اضافه می‌شود. با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف برای ۳ کشور اولیه‌ی اتحادیه، این اتحادیه پس از ۲۰ سال حداکثر چند کشور خواهد داشت؟

- الف) ۱۶ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۴ (ه) ۱۲

۱۱- هُزْبَر یک دستگاه «سیب‌شناس» خریده است. این دستگاه ۳ سیب می‌گیرد و اگر حداقل  $k$  سیب خراب در بین این ۳ سیب وجود داشته باشد، بوق می‌زند! حال هُزْبَر ۱۴ سیب خریده است و می‌داند  $k$  تا از این سیب‌ها خراب است. در حالات زیر حداکثر چند بار باید از دستگاه استفاده کند تا یکی از سیب‌های خراب را بیابد: حالت اول  $k=1$  و حالت دوم  $k=3$  (جواب این دو حالت به ترتیب از راست به چپ آمده‌اند).

- الف) ۵ و ۳۶۳ (ب) ۶ و ۳۶۳ (ج) ۷ و ۳۶۳ (د) ۷ و ۳۶۴ (ه) ۶ و ۳۶۴

۱۲- تعداد ماشین ۱۳۹۳ داریم. هر ماشین در یک لحظه از زمان روی یک نقطه از محور مختصات ظاهر شده و تا ابد با سرعتی ثابت در یک جهت مشخص (سمت راست یا چپ) شروع به حرکت می‌کند. در هر لحظه، ماشینی که در سمت راست همه‌ی ماشین‌های دیگر قرار بگیرد، ماشین برنده می‌نامیم. در طول زمان ماشین برنده حداکثر چند بار تغییر می‌کند؟

- الف) ۱۳۹۲ (ب) ۲۰۹۰ (ج) ۲۷۸۴ (د) ۱۳۹۳ (ه) بی‌نهایت

۱۳- فاطمه جایگشت‌ها را خیلی دوست دارد. او همیشه درایه‌های جایگشت‌ها را از صفر شماره‌گذاری می‌کند و برای یک جایگشت عدد زیبایی آن را این گونه تعریف می‌کند: به ازای هر درایه، XOR شماره‌ی آن درایه و عددی که در آن قرار دارد را حساب می‌کند، و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می‌کند. به نظر او هر چه عدد زیبایی یک جایگشت بیشتر باشد، جایگشت زیباتر است! حال به او بگویید بین جایگشت‌های مختلف اعداد ۰ تا ۶، بیش‌ترین میزان زیبایی چقدر است؟

- الف) ۴۲ (ب) ۳۶ (ج) ۳۲ (د) ۴۰ (ه) ۴۸

۱۴- تعدادی سیب و انار و پرتقال و دو گلدان جادویی داریم که محصولاتشان پس از یک ماه می‌رسند. ابتدای هر ماه می‌توانیم به شیوه‌ی زیر در آن‌ها میوه بکاریم و در انتهای ماه محصول را جمع‌آوری کنیم. (هر حالت به تنهایی در یک گلدان انجام می‌شود و پس از جمع‌آوری هیچ اثری از درخت و میوه‌ی کاشته شده باقی نمی‌ماند):

- یک سیب بکاریم و سه سیب برداشت کنیم.
- یک انار بکاریم و پنج انار برداشت کنیم.
- یک پرتقال بکاریم و دو پرتقال برداشت کنیم.
- دو سیب و دو انار بکاریم و چهار پرتقال برداشت کنیم.

فرض کنید در ابتدا از هر میوه یکی داریم. به چه تعداد از حالات زیر می‌توان رسید؟ (۳ و ۲ و ۱) یعنی یک سیب و دو انار و سه پرتقال.

- (۱۴۳۶ و ۲۰۱۵ و ۱۳۹۳)
- (۲۰۱۵ و ۱۴۳۶ و ۱۳۹۳)
- (۴ و ۷ و ۱۳)
- (۱۰۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰)

- الف) ۳ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴ (ه) ۰

۱۵- ۱۰۲۴ لامپ خاموش با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار دارند. کیان در ۱۰ مرحله کلید تعدادی از لامپ‌ها را می‌زند که منجر به تغییر وضعیت آن لامپ‌ها می‌شود (از خاموش به روشن و برعکس). اگر کیان در مرحله‌ی  $n$ ام کلید همه لامپ‌هایی را که باقی مانده‌ی شماره‌ی آن‌ها بر  $2^n$  صفر نیست بزند، در پایان چند لامپ روشن وجود خواهد داشت؟

- الف) ۳۴۱ (ب) ۶۸۳ (ج) ۶۸۲ (د) ۳۴۲ (ه) ۱۰۲۳

۱۶- یک گراف را «زیبا» می‌نامیم اگر رأسی در آن وجود داشته باشد که در تمام دورها به طول فرد آمده باشد. بین تمام گراف‌های ساده‌ی  $10 \times 10$  رأسی زیبا، گرافی را در نظر بگیرید که بیش‌ترین تعداد یال را دارد. این گراف چند یال دارد؟

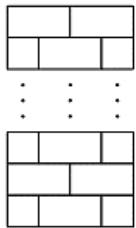
- الف) ۴۷۰ (ب) ۲۵۰۰ (ج) ۲۶۰۰ (د) ۱۰۱ (ه) ۵۰۵۰

۱۷- یک جدول  $4 \times 4$  داده شده است. می‌خواهیم شش مهره‌ی یکسان را در شش خانه‌ی متفاوت از جدول قرار دهیم طوری که در هر سطر و در هر ستون تعداد زوجی مهره قرار گرفته باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

- الف) ۶۴ (ب) ۱۸ (ج) ۲۴ (د) ۱۲۸ (ه) ۹۶

۱۸- دنباله‌ی  $(۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲, ۲۶, ۳۰, ۳۴, ۳۸, ۴۲)$  را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان بین اعداد این دنباله عملگرهای AND و OR قرار داد طوری که حاصل عبارت برابر صفر شود؟ دقت کنید که باید هفت عملگر گذاشته شود و عملگرها از چپ به راست محاسبه می‌شوند.

- الف) ۳۶ (ب) ۴۸ (ج) ۲۴ (د) ۴۲ (ه) ۶۴



۱۹- جدولی با ۱۰۰ سطر همانند شکل رو به رو در نظر بگیرید که ۵۰ سطر آن دو خانه و ۵۰ سطر آن سه خانه دارند. می‌خواهیم از گوشه‌ی پایین چپ به گوشه‌ی بالا راست برویم به صورتی که از روی خطها حرکت کرده و همواره به سمت بالا و یا راست حرکت کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

- الف) ۴۳۵      ب) ۳۸۰      ج) ۴۲۰      د) ۳۹۹      ه) ۴۱۸

۲۰- سه نفر داریم که پول هر یک از آنها (به دلار) یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است و مجموع پول آنها ۱۰۱ دلار است. هرگاه پول یکی از این افراد از مجموع پول دو نفر دیگر بیشتر باشد، می‌گوییم بین این سه نفر «تضاد طبقاتی» وجود دارد. به چند حالت ممکن است بین این سه نفر تضاد طبقاتی وجود داشته باشد؟

- الف) ۳۸۲۵      ب) ۳۶۷۵      ج) ۱۲۷۵      د) ۱۲۲۵      ه) ۷۳۵۰

۲۱- یارا یک قطعه چوب به طول ۲۰ به یاور داده و از او خواسته که آن را به ۲۰ قطعه به طول ۱ تبدیل کند. هر بار که یاور یک قطعه چوب به طول  $x + y$  را به دو قطعه با طول  $x$  و  $y$  تقسیم کند، یارا  $x \times y$  تومان به او و  $x + y$  تومان به شاگردش می‌دهد. حداکثر پولی که یاور و شاگردش می‌توانند به دست بیاورند به ترتیب چند است؟

- الف) ۲۱۰ و ۱۱۶      ب) ۱۹۰ و ۲۰۹      ج) ۱۷۰ و ۲۰۹      د) ۱۹۰ و ۸۸      ه) ۱۷۰ و ۸۸

۲۲- سلطان در نقطه‌ی ۰ از محور اعداد صحیح قرار گرفته است و گرفتار ۹ گول خطرناک با شماره‌های ۱ تا ۹ شده است. گول‌ها دو نوع هستند:

دسته‌ی نخست، گول‌های راست‌گرا که دستور می‌دهند سلطان دو واحد به راست برود، دسته‌ی دوم گول‌های چپ‌گرا که دستور می‌دهند سلطان یک واحد به چپ برود.

کار در ۹ مرحله انجام می‌شود. در مرحله ی  $i$ ، گول شماره‌ی  $i$ ، دستور مورد نظر را (بر اساس راست‌گرا یا چپ‌گرا بودنش) به سلطان می‌دهد. سلطان می‌تواند به دستور گول عمل کند یا اینکه گول را بکشد و جا به جا نشود. اگر سلطان یکی از گول‌ها را بکشد، خسته می‌شود و ۲ گول بعدی را نمی‌تواند

بکشد. در صورتی که در انتها، سلطان در خانه‌ی ۰ مختصات باشد، آزاد می‌شود و در غیر این صورت، زندانی می‌ماند. سلطان تنها می‌داند که  $k$  تا از گول‌ها راست‌گرا هستند و  $9 - k$  گول دیگر، چپ‌گرا هستند، اما شماره‌ی گول‌ها را نمی‌داند و طبیعتاً از ابتدا نمی‌داند که در مرحله‌ی  $i$  ام چه گولی دستور خواهد داد. به ازای چند عدد صحیح  $k$  با شرط  $0 \leq k \leq 9$ ، سلطان الگوریتمی دارد که بتواند به طور تضمینی آزاد شود؟

- الف) ۱      ب) ۲      ج) ۰      د) ۳      ه) ۴

۲۳- دنباله‌ی  $(3, 4, 5, 7, 4, 3, 5, 4, 6, 5)$  را در نظر بگیرید. دستگاهی داریم که می‌تواند جمع هر بازه از این اعداد را حساب کند. یعنی اگر دو عدد  $i$  و  $j$  را به آن بدهیم  $(i \leq j)$ ؛ جمع اعداد  $i$  ام تا  $j$  ام (شامل خود این دو عدد) را محاسبه می‌کند. اما این دستگاه یک مشکل دارد و آن این که در هنگام حساب کردن جمع اعداد (در مبنای دو) سرریز اعداد (دو بر یک آن) را حساب نمی‌کند. یعنی برای ورودی‌های ۶ و ۷ که باید جمع ۵ و ۳ را محاسبه کند، خروجی‌اش عدد ۶ است  $(10 + 1 = 11)$ .

برای اینکه ثابت کنیم دستگاه اشتباه کار می‌کند می‌خواهیم که بازه را نشان دهیم که جمع اعداد آن با این دستگاه صفر شود. در این دنباله چند بازه

داریم که به ازای آن‌ها ماشین جواب صفر می‌دهد؟

- الف) ۸      ب) ۲      ج) ۱      د) ۱۰      ه) ۵

یک جدول  $4 \times 4$  را خالی می‌گوییم، اگر خانه‌های آن به صورت شطرنجی (یک در میان) با رنگ‌های سیاه و سفید رنگ شده باشند. دو خانه از یک جدول را مشابه می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. منظور از یک قطر در یک جدول، هر قطری اعم از اصلی و فرعی است. به این ترتیب، هر یک از خانه‌های گوشه به تنهایی یک قطر هستند و یک جدول  $4 \times 4$ ، ۱۴ قطر دارد.

باب اسفنجی، آقای خرچنگ و اختاپوس هر کدام یک جدول  $4 \times 4$  خالی دارند. باب اسفنجی در هر مرحله می‌تواند دو خانه‌ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ آن دو خانه را جا به جا کند. آقای خرچنگ در هر مرحله می‌تواند دو خانه‌ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ هر دو خانه را عوض کند (از سیاه به سفید و برعکس). اختاپوس نیز در هر مرحله می‌تواند یک قطر از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ تمام خانه‌های آن قطر را عوض کند.

۲۴- چند جدول  $4 \times 4$  متفاوت وجود دارد که باب اسفنجی با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

- ماه
- الف) ۳۸ (ب)  $2^{15}$  (ج)  $2 \cdot \frac{16}{8}$  (د)  $\frac{16}{8}$  (ه)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{8}$

۲۵- چند جدول  $4 \times 4$  متفاوت وجود دارد که آقای خرچنگ با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

- ماه
- الف)  $2 \cdot \frac{16}{8}$  (ب)  $2^{16}$  (ج)  $2^8$  (د)  $\frac{16}{8}$  (ه)  $2^{15}$

۲۶- چند جدول  $4 \times 4$  متفاوت وجود دارد که اختاپوس با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

- ماه
- الف)  $2^4$  (ب)  $9 \times 2^{12}$  (ج)  $2^{12}$  (د)  $2^{14}$  (ه)  $2^{16}$



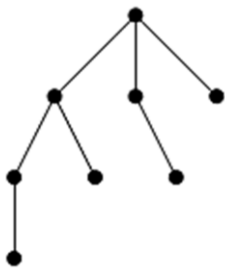
گراف  $G$  را به این شکل می‌سازیم: ابتدا به ازای هر یک از اعداد ۰ تا ۶۳ یک رأس در نظر می‌گیریم. سپس بین هر دو رأس که نمایش دودویی آن‌ها دقیقاً در یک بیت اختلاف دارد یک یال رسم می‌کنیم. به هر زیرمجموعه‌ی ۷ تایی از رأس‌های  $G$  که دقیقاً شکل رو به رو را بسازند یک «آدمک» می‌گوییم. دقت کنید که بین رأس‌های یک آدمک نباید هیچ یالی غیر از یال‌های نشان داده شده در شکل مقابل در گراف  $G$  وجود داشته باشد. با توجه با توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۷- در گراف  $G$  چند آدمک می‌توان پیدا کرد؟

- ماه
- الف) ۹۶۰۰ (ب) ۳۸۴۰ (ج) ۵۷۶۰ (د)  $460 \cdot 80$  (ه) ۶۰۰

۲۸- عدد یک آدمک را برابر با XOR مقدار رأس‌های آن در نظر می‌گیریم. مجموع اعداد تمام آدمک‌ها در گراف  $G$  چند است؟

- ماه
- الف) ۱۹۳۵۳۶۰ (ب) ۱۸۱۴۴۰ (ج) ۱۴۵۱۵۲۰ (د)  $20 \cdot 16$  (ه)  $120 \cdot 960$



باستان‌شناسان به تازگی روی سنگ‌های یک غار اشکالی از شجره‌نامه‌های یک قبیله‌ی باستانی یافته‌اند که نشان می‌دهد این قبیله در بچه‌دار شدن رسوم عجیبی داشته‌اند. در این قبیله اگر یک پدر  $k$  پسر داشته باشد، پسر بزرگ‌تر خانواده  $k-1$  پسر به دنیا می‌آورد، پسر دوم خانواده  $k-2$  پسر و همین‌طور؛ پسر کوچک خانواده که هیچ پسری به دنیا نمی‌آورد و نباید پسر دار شود. در شکل رو به رو شجره‌نامه؛ یک خاندان از این قبیله را می‌بینید که جد بزرگ آن‌ها دارای سه پسر بوده است. در این شکل پسران، ترتیب سن از چپ به راست قرار دارند (از بزرگ به کوچک). توجه داشته باشید که در این شجره‌نامه، تنها اطلاعات مردان فامیل می‌آمده است.

۲۹- در یکی از شجره‌نامه‌ها که روی سنگ‌ها یافت شده است، مشخص است که جد بزرگ خاندان ۱۰ پسر داشته است، اما اطلاعات مربوط به پسر سوم جد بزرگ بر اثر مرور زمان مخدوش شده است. با استفاده از اطلاعات فوق دانشمندان می‌خواهند بدانند تعداد مردان در خاندانی که جد بزرگش این پسر بوده، چند است؟

الف) ۲۵۶

ب) ۱۲۸

ج) ۴۰۳۲۰

د) ۸۴

ه) ۵۰۴۰

۳۰- فاصله‌ی فامیلی دو فرد در یک شجره‌نامه را طول مسیری که باید روی شجره‌نامه طی کرد تا از یک فرد به فرد دیگر رسید تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فاصله‌ی فامیلی یک فرد با پدرش یک، با پدربزرگش دو و با عمویش سه است. حال در یک خاندان که جد بزرگش ۱۰۰ پسر دارد، فاصله‌ی فامیلی چند جفت از افراد در این خاندان برابر با ۱۹۸ می‌باشد؟ (جفت‌های  $(a,b)$  و  $(b,a)$  در شمارش تفاوتی ندارند و یکبار شمرده می‌شوند).

الف) ۱۹۷

ب) ۱۹۸

ج) ۴

د) ۵

ه) ۱۰۰



«پاسخنامه تشریحی»

۱- گزینه ۴ درست است.

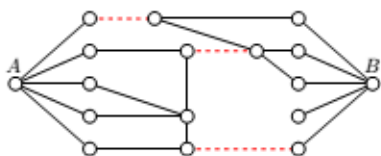
با حالت بندی بر روی مکان های مختلف مهره سفید تعداد حالات را می شماریم.

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | A |
| B | C | B |
| A | B | A |

اگر مهره سفید در مکان A باشد مهره سیاه در ۵ خانه دیگر می تواند باشد. اگر مهره سفید در مکان B باشد مهره سیاه در سه خانه دیگر می تواند باشد. اگر مهره سفید در مکان C باشد مهره سیاه در هیچ خانه ای نمی تواند باشد. جمع این حالات مختلف برابر با  $4 \times (5 + 3) = 32$  می باشد که جواب مسئله است.

۲- گزینه ۵ درست است.

با حذف خطوطی که در شکل مشاهده می کنید می توان با حذف سه خط به هدف رسید. همچنین جوابی با کمتر از سه خط وجود ندارد چون به سادگی می توان سه مسیر در شکل از نقطه A به نقطه B یافت که خط مشترکی نداشته باشند. در این صورت از هر مسیر حداقل باید یک خط حذف شود. پس پاسخ سه خط است.



۳- گزینه ۵ درست است.

اگر جدول را به شکل یک اسب ببینیم، هر یک از اعداد ۳ تا ۸ را می توان در سر اسب قرار داد. از پنج عدد باقی مانده، بیشترین در پای جلویی اسب و کمترین در کنار ۱ قرار می گیرد. هر یک از سه عدد باقی مانده می تواند در پای پشتی اسب قرار بگیرد و سپس محل دو عدد دیگر به طور یکتا مشخص می شود. پس در کل  $3 \times 6 = 18$  حالت برای قرار دادن اعداد وجود دارد.

۴- گزینه ۱ درست است.

درس F باید همیشه به عنوان آخرین درس گرفته شود، پس می توان آن را حذف کرد. سه درس میانی C, D, E به هر شش ترتیب ممکن می توانند ظاهر شوند. در هر صورت A باید پیش از این سه درس و B باید پیش از D باشد. اگر درس C و E را با — نشان دهیم، به ازای ترتیب — AD درس B دو انتخاب، به ازای — D — A درس B سه انتخاب، و به ازای — D — A درس B چهار انتخاب دارد. پس تعداد ترتیب های ممکن  $2 \times (2 + 3 + 4) = 18$  است.

۵- گزینه ۱ درست است.

آن ها کافی است تعدادی از افراد صف را بکشند، تا نفر اول خودشان مکان  $4k+1$  یا  $4k+2$  از صف را داشته باشد که این کار با ۲ تیر قابل انجام است.

۶- گزینه ۳ درست است.

با توجه به اینکه احتمال هر ۳۶ حالت ممکن یکسان است، کفایت مجموع امتیاز همه ی حالات را محاسبه و بر ۳۶ تقسیم کنیم. ضرب هر دو عدد بین ۱ تا ۶ باید یکبار ظاهر شود که همانند یک جدول ضرب ۶ در ۶ است که مجموع خانه های آن می شود:

$$21^2 = (1 + 2 + \dots + 6)^2 \text{ در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: } \frac{21^2}{36} = \frac{49}{4} = 12 \frac{1}{4}$$



## ۷- گزینه ۲ درست است.

همانطور که مشاهده می‌شود تعداد خانه‌های خالی جدول فرد است. در نتیجه از قطعه‌ی ۵ خانه‌ای نیز باید فرد بار استفاده شود. اما به راحتی مشاهده می‌شود که حداکثر یکبار می‌توان از این قطعه استفاده کرد. اگر جای قطعه‌ی ۵ خانه‌ای را مشخص کنیم، نحوه‌ی قرارگیری بقیه‌ی قطعات به صورت یکتا مشخص می‌شود. با توجه به اینکه قطعه‌ی ۵ خانه‌ای می‌تواند در دو جای جدول قرار گیرد جواب این مسئله نیز برابر ۲ خواهد بود.

## ۸- گزینه ۱ درست است.

هر مشتری که نوبت او بین ۱ تا ۴۷ باشد کارش تمام شده است و می‌توانسته از هر کدام از سه باجه استفاده کرده باشد. مشتری ۴۴ در باجه اول است و مشتری‌های ۴۵ تا ۴۷ می‌توانستند در یکی از باجه‌های دوم یا سوم باشند (چون در باجه‌ی اول هنوز کار نفر ۴۴ تمام نشده است). به همین ترتیب مشتری ۴۸ در باجه دوم است و نفر ۴۹ و ۵۰ نیز حتماً از باجه‌ی سوم استفاده کرده‌اند. در نتیجه پاسخ برابر است با:  $3^3 \times 3^3$

## ۹- گزینه ۵ درست است.

اگر همه‌ی کاشی‌ها افقی باشند،  $24 = 4 + 20$  خط با این خاصیت خواهیم داشت. از طرفی هیچ دو خط عمودی مجاور نمی‌توانند دارای این خاصیت باشند، زیرا بین آن‌ها ۲۱ خانه است. پس حداکثر ۴ خط عمودی و حداکثر ۲۰ خط افقی خواهیم داشت.

## ۱۰- گزینه ۱ درست است.

اگر در ابتدا کشورهای ۱ و ۳ و ۵ عضو اتحادیه باشند، تمام کشورها عضو اتحادیه خواهند شد. پس پاسخ برابر ۱۶ است.

## ۱۱- گزینه ۲ درست است.

برای قسمت  $k = 1$  اگر تعداد کل سیب‌ها ۵ تا باشد می‌توان سیب خراب را با ۳ حرکت پیدا کرد: ابتدا ۳ سیب را انتخاب می‌کنیم و به دستگاه می‌دهیم، اگر همگی سالم باشند در حرکت بعدی یک سیب انتخاب نشده و دو سیب سالم را به دستگاه می‌دهیم و وضعیت همه سیب‌ها مشخص می‌شود اما اگر دستگاه بوق بزند می‌فهمیم که دو سیب انتخاب نشده سالم‌اند و با استفاده از آن‌ها وضعیت ۳ سیب اولی را مشخص می‌کنیم.

به طور کلی اگر پس از یک آزمایش دستگاه بوق بزند با دو آزمایش بعدی می‌توان سیب گندیده را تعیین کرد. اگر  $f(x)$  را برابر با تعداد آزمایش‌های مورد نیاز برای تعیین کردن سیب خراب در بین  $x$  سیب در نظر بگیریم ( $5 \leq x$ ) می‌توان رابطه‌ی بازگشتی  $f(x) = f(x-3) + 1$  را اثبات کرد: اگر سه سیب را به دستگاه دهیم و دستگاه بوق بزند، قطعاً سیب خراب داخل این دسته است و سیب‌های خارج این دسته سالم‌اند و به راحتی می‌توان سیب خراب را با ۲ حرکت پیدا کرد. در غیر این صورت می‌توان این ۳ سیب را در نظر نگرفت و ادامه داد. جواب نهایی برابر است با:  $f(14) = f(5) + 3 = 6$ . برای قسمت  $k = 3$  اگر دو دسته ۳ تایی متفاوت از سیب‌ها وجود داشته باشد که هیچ کدام را به دستگاه نداده باشیم و دستگاه نیز تاکنون بوق نزده باشد نمی‌توان تشخیص داد که کدام یک از این دو دسته تمامی سیب‌هایش گندیده است. بنابراین تنها می‌توانیم یک دسته ۳ تایی داشته باشیم که به دستگاه داده نشده نتیجه آن با توجه به نتیجه بقیه دسته‌ها به صورت یکتا مشخص خواهند شد.

در این صورت باید تمامی راه‌های انتخاب ۳ سیب از ۱۴ سیب به جز یک حالت را امتحان کرد تا به جواب برسیم. بنابراین تعداد دفعات استفاده از دستگاه برابر است با:  $3^4 - 1 = 3^4 - 1$ .

## ۱۲- گزینه ۳ درست است.

ماشین برنده به دو علت می‌تواند تغییر کند: (۱) به علت ظاهر شدن یک ماشین در سمت راست ماشین برنده‌ی فعلی (۲) به علت سبقت گرفتن یک ماشین از ماشین برنده‌ی فعلی. بدیهی است که تغییرات از نوع (۱) حداکثر به تعداد ماشین‌ها منهای یک یعنی ۱۳۹۲ است. در مورد تعداد تغییرات از نوع (۲) نیز می‌توان از این شهود استفاده کرد که هر ماشین برنده‌ای که از ماشین دیگری عقب بیافتد

دیگر نمی‌تواند ماشین برنده لقب بگیرد. بنابراین تعداد تغییرات از نوع (۲) برابر  $1392 - 1 = 1393$  خواهد شد. در ضمن می‌توان مثالی زد که ماشین برنده ۲۷۸۴ بار تغییر کند. تصور کنید که ماشین  $i$  ام در زمان  $i$  در نقطه‌ی  $i$  از محور مختصات ظاهر شود. فرض کنید همه‌ی ماشین‌ها غیر از ماشین اول با سرعت نزدیک به صفر به سمت راست حرکت کنند و ماشین اول با سرعت ثابت کمی کم‌تر از ۱ به سمت راست حرکت کند. به سادگی می‌توان دید در این مثال ماشین برنده ۲۷۸۴ بار تغییر می‌کند.

### ۱۳- گزینه‌ی ۱ درست است.

یکی از حالات که جواب ۴۲ می‌شود این است که جایگشت  $\langle 0, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$  باشد. اثبات می‌کنیم جواب هیچ‌گاه از ۴۲ بیش‌تر نخواهد شد. برای راحتی کار فرض کنید که اعداد ۰ تا ۶ را با سه رقم باینری نمایش دهیم. در عملیات XOR تعداد ارقام باینری افزایش پیدا نخواهد کرد، پس نتیجه XOR زمانی بیشینه خواهد شد که هر رقم دقیقاً یکی از دو عدد یک باشد و می‌دانیم در این حالت XOR مشابه جمع عمل خواهد کرد.

بنابراین حداکثر مجموع کل زمانی رخ خواهد داد که XOR هر جایگاه برابر با جمع شماره‌ی آن جایگاه و عدد درونش باشد. پس تمامی

$$\text{اعداد } 0 \text{ تا } 6 \text{ دو بار در مجموع کل می‌آیند و جواب کل برابر با } 42 = 2 \times \frac{6 \times 7}{2} \text{ خواهد بود.}$$

### ۱۴- گزینه‌ی ۲ درست است.

اولین شرط برای حالت نهایی، فرد بودن تعداد سیب‌ها و انارها است. (چون در هر ماه زوجیت تعداد سیب‌ها و انارها ثابت است.) چون در ابتدا یک سیب و یک انار داریم پس همواره تعداد آن‌ها فرد است. در حالتی که تعداد انارها  $4k + 1$  باشد، می‌توان با سه حرکت اول تمام حالاتی که شرط بالا را دارند تولید کرد. ولی اگر تعداد انارها  $4k + 3$  باشد حداقل یکبار از روش چهارم باید استفاده کنیم و در نتیجه حداقل ۵ پرتقال خواهیم داشت. هر حالتی که دو شرط بالا را داشته باشد را به سادگی می‌توان تولید کرد. در نتیجه تنها حالت قابل دست‌یابی است. (۱۴۳۶ و ۲۰۱۵ و ۱۳۹۳)

### ۱۵- گزینه‌ی ۱ درست است.

کافی است اعداد را به صورت دودویی در نظر بگیریم و روی اولین جایی که رقم ۱ ظاهر شده است حالت‌بندی کنیم. در جدول زیر تعداد خوردن کلید برای هر دسته از لامپ‌ها و تعداد لامپ‌های موجود در هر دسته نوشته شده است. واضح است که در هر دسته، تعداد زده شدن کلید به تعداد رقم‌های بعد از اولین رقم ۱ می‌باشد. در نمایش اعداد  $X$  به منظور ۱ یا ۰ می‌باشد و لامپ‌های دسته‌هایی در پایان روشن خواهد بود که «فرد» بار کلید آن‌ها خورده شده باشد.

| تعداد خوردن کلید | تعداد هر دسته | حالت اعداد     |
|------------------|---------------|----------------|
| ۱۰               | $2^9$         | $0xxxxxxxxx1$  |
| ۹                | $2^8$         | $0xxxxxxxx10$  |
| ۸                | $2^7$         | $0xxxxxxxx100$ |
| ۷                | $2^6$         | $0xxxxxx1000$  |
| ۶                | $2^5$         | $0xxxxx10000$  |
| ۵                | $2^4$         | $0xxxx100000$  |
| ۴                | $2^3$         | $0xxx1000000$  |
| ۳                | $2^2$         | $0xx10000000$  |
| ۲                | $2^1$         | $0x100000000$  |
| ۱                | ۱             | $0100000000$   |
| ۰                | ۱             | $1000000000$   |

پس پاسخ سؤال برابر با  $341 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1$  است.

۱۶- گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر رأسی در همه‌ی دوره‌های فرد وجود دارد را حذف کنیم، در این صورت گراف به دست آمده دور فرد ندارد و در نتیجه دو بخشی است. گراف دو بخشی ۱۰۰ رأسی هم زمانی بیش‌ترین تعداد یال را دارد که اندازه‌ی دو بخش برابر بوده و گراف دو بخشی کامل باشد. این گراف دو بخشی ۲۵۰۰ یال دارد و رأس حذف شده هم حداکثر درجه‌اش ۱۰۰ است. پس تعداد یال‌های گراف حداکثر ۲۶۰۰ است. در ضمن اگر به گراف دو بخشی کامل که اندازه‌ی هر بخشش ۵۰ است، یک رأس اضافه شود که به همه‌ی رئوس دیگر متصل باشد، گراف به دست آمده زیبا است و ۲۶۰۰ یال خواهد داشت.

۱۷- گزینه‌ی ۵ درست است.

واضح است که در یک سطر نمی‌توان ۴ مهره قرار داد، زیرا با دو مهره‌ی باقی‌مانده نمی‌توان زوج بودن تمام ستون‌ها را حفظ کرد. بنابراین در هر سطر (و در هر ستون) صفر یا دو مهره قرار دارد. با توجه به وجود ۶ مهره، دقیقاً یک سطر و یک ستون خالی خواهیم داشت. برای انتخاب این سطر و ستون خالی  $4 \times 4$  انتخاب وجود دارد. به ازای هر انتخاب، در جدول  $3 \times 3$  باقی‌مانده به ۶ طریق می‌توان مهره‌ها را قرار داد. بنابراین پاسخ برابر  $96 = 4 \times 4 \times 6$  است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ درست است.

برای صفر شدن حاصل عبارت، باید تمامی رقم‌های آن صفر شوند. آخرین عدد عبارت را در نظر بگیرید، در صورتی که تمامی رقم‌های آن صفر باشند بر حسب آخرین عملگر مسئله را حل می‌کنیم. برای سادگی عملگرهای AND و OR را به ترتیب با  $\wedge$  و  $\vee$  نشان می‌دهیم. اگر عملگر آخر  $\wedge$  باشد، عبارت مستقل از سایر عملگرها صفر خواهد شد که در این صورت  $2^{k-1}$  حالت داریم (k تعداد عملگرها است) و در صورتی که  $\vee$  باشد، پاسخ برابر است با تعداد راه‌هایی که می‌توان بقیه‌ی دنباله را صفر کرد. اما اگر آخرین عدد صفر نباشد، قطعاً آخرین عملگر  $\wedge$  است، زیرا در غیر این صورت حاصل عبارت صفر نخواهد شد. حال در صورتی که  $\wedge$  بگذاریم، این استدلال را برای سایر اعداد دنباله تکرار می‌کنیم.

۱۹- گزینه‌ی ۴ درست است.

از اولین باری که به سمت راست حرکت کنیم همواره در هر سطر، یکبار به سمت راست حرکت می‌کنیم. در نتیجه پس از حداکثر سه سطر به ستون سمت راست می‌رسیم. پس کافی است اولین حرکت به سمت راست را در نظر بگیریم (با توجه به اینکه در سطر شماره‌ی فرد هست یا زوج) و تعداد حالات ممکن را محاسبه کنیم:

$$\text{سطرهای فرد: } 49 \times 5 + 4 + 1 = 250$$

$$\text{سطرهای زوج: } 49 \times 3 + 2 = 149$$

در نتیجه در مجموع ۳۹۹ حالت وجود دارد.

۲۰- گزینه‌ی ۲ درست است.

افراد را با شماره‌های ۱ تا ۳ شماره‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم پول نفر شماره ی  $i$  برابر  $x_i$  دلار باشد. ابتدا به ۳ حالت، فردی که پولش از بقیه بیشتر است را انتخاب می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید این فرد، نفر شماره ۱ باشد. پول این نفر حداقل ۵۱ دلار است و پول هر یک از دو نفر دیگر حداقل ۱ دلار است. پس جواب، برابر تعداد جواب‌های معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 101, x_1 \geq 51, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$$

$$\binom{101 - (51 + 1 + 1) + 2}{2}$$

است. پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$3 \binom{50}{2} = 3 \times \frac{50 \times 49}{2} = 3675$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ درست است.

پولی که یاور به دست می‌آورد برای همه‌ی روش‌های خرد کردن ثابت است. قطعه چوب به طول  $۲ + ۳$  را به صورت  $(۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱)$  در نظر بگیرید. هنگام شکستن این قطعه چوب به دو قطعه به میزان  $(۱ + ۱) \times (۱ + ۱)$  تومان پول به یاور داده می‌شود. حال تکه‌های چوب به طول واحد در یک قطعه چوب را شماره‌گذاری کنید. تکه  $i$ ام و  $j$ ام تا زمانی که پس از تقسیم شدن هر دو در یک قطعه قرار بگیرند، یارا پولی بابت آن دو به یاور نمی‌دهد. اما اولین باری که تکه  $i$ ام و  $j$ ام پس از تقسیم در دو تکه‌ی جداگانه قرار بگیرند، یارا یک واحد پول بابت ضرب  $i$ امین  $۱$  که در پرانتز اول قرار می‌گیرد، در  $j$ امین  $۱$  که در پرانتز دوم قرار می‌گیرد به یاور می‌دهد. از آنجایی که اکنون این دو تکه در یک قطعه قرار ندارند، دیگر بابت آن‌ها به یاور پولی داده نخواهد شد. پس یاور به هر صورتی که چوب را خرد کند، به میزان ثابتی پول از یارا می‌گیرد. حال اگر هر بار یک قطعه به طول واحد از چوب جدا کند  $\frac{۱۹ \times ۲۰}{۲}$  تومان به دست می‌آورد. پس پاسخ برابر با گزینه ۲ یعنی ۱۹۰ می‌باشد.

برای شاگرد یاور، بهترین حالت زمانی رخ می‌دهد که از یکی از دو سر چوب شروع کنیم و هر بار یک واحد از چوب ببریم. با استقرای قوی ثابت می‌کنیم برای یک قطعه چوب به طول  $n$  بیش‌ترین پول قابل دست‌یابی برابر است با  $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ . به ازای  $n = ۲$  حکم بدیهی است. فرض کنید در مرحله‌ی اول چوب به دو قسمت به طول‌های  $k$  و  $n+1-k$  تقسیم شود. آنگاه پولی که شاگرد یاور می‌گیرد، در بهترین حالت برابر است با:

$$T(n+1) = (k+n+1-k) + T(k) + T(n+1-k)$$

بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض کنید:  $k < n+1-k$ ، حال طبق فرض استقرا داریم:

$$T(n+1) = n+1 + \frac{(k+2)(k-1)}{2} + \frac{(n+3-k)(n-k)}{2} = n + \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + k^2 - k(n+1)$$

حال به دو جمله‌ی آخر توجه کنید، چون  $k > n+1-k$  است، بیش‌ترین مقدار عبارت بالا زمانی خواهد بود که  $k$  کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد، پس باید  $k = ۱$  باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$T(n+1) = n + \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1 - (n+1) = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ درست است.

سلطان می‌تواند حداکثر ۴ گول را بکشد. ابتدا فرض کنید  $k \geq 6$  باشد. در این صورت سلطان حداقل باید حرف حداقل  $۳ = ۶ - ۳$  گول راست‌گرا را گوش کند و دست کم  $۶ = (۶ - ۳) \times ۲$  واحد به راست برود. پس برای رسیدن به نقطه‌ی ۰، دست کم ۶ گول چپ‌گرا لازم است؛ در حالی که حداکثر  $۳ = ۶ - ۳$  گول چپ‌گرا وجود دارد.

حال فرض کنید  $k = ۵$  باشد. اگر سلطان کم‌تر از ۳ گول راست‌گرا را بکشد، دست کم نیاز به  $۶ = (۵ - ۲) \times ۲$  گام به سمت چپ دارد؛ در حالی که تنها ۴ گول چپ‌گرا وجود دارد. از طرفی اگر ترتیب گول‌ها به این صورت باشد که در ابتدا هر ۵ گول راست‌گرا دستور بدهند و سپس ۴ گول چپ‌گرا دستور بدهند، سلطان می‌تواند حداکثر ۲ تا از گول‌های راست‌گرا را بکشد. پس در  $k = ۵$  هم الگوریتم تضمینی وجود ندارد.

حال فرض کنید  $k < ۲$  باشد. در این صورت سلطان با دست کم ۸ گول چپ‌گرا مواجه است که می‌تواند حداکثر ۳ تا از آن‌ها را بکشد. پس حداقل  $۵ = ۸ - ۳$  گام باید به سمت چپ انجام بدهد؛ در حالی که حداکثر ۱ گول راست‌گرا وجود دارد و سلطان نمی‌تواند در انتها در نقطه‌ی ۰ باشد.

حال فرض کنید  $k = ۴$  باشد. تنها حالت برد سلطان این است که ۲ گول راست‌گرا و ۱ گول چپ‌گرا را بکشد. گول‌ها را در ۳ دسته‌ی ۱ و ۲ و ۳ تقسیم‌بندی می‌کنیم که دسته‌ی شماره‌ی  $i$  شامل گول‌های شماره  $۱, ۳i - ۲, ۳i$  است. سلطان از هر دسته حداکثر ۱ گول می‌تواند بکشد و از طرفی باید ۳ گول بکشد؛ پس از هر دسته باید دقیقاً یک گول بکشد. اگر در دسته‌ی ۱، تنها ۱ گول راست‌گرا باشد، سلطان باید آن را بکشد؛ چون ممکن است ۳ گول دیگر، در یک دسته باشند و نمی‌توان از آن‌ها ۲ گول را کشت. پس سلطان هنگام دیدن

گول‌های دسته اول، تا گول شماره‌ی ۳، اگر گول راست‌گرا ندید، نباید آن را بکشد. حال فرض کنید ترتیب گول‌ها از چپ به راست، به ترتیب زیر تنظیم شده باشد (سلطان این ترتیب را نمی‌داند، R یعنی راست‌گرا و L یعنی چپ‌گرا):

LLRRRLRLL

سلطان تا گول شماره ۳ کسی را نمی‌کشد و گول شماره ۳ را می‌کشد. پس گول‌های شماره ۴ و ۵ را نمی‌تواند بکشد. پس مجبور است گول شماره ۶ را بکشد. پس گول‌های ۷ و ۸ را نمی‌تواند بکشد. پس مجبور است گول شماره ۹ را بکشد که به هدف خود نخواهد رسید. پس در  $k = 4$  هم الگوریتم تضمینی وجود ندارند.

حال فرض کنید  $k = 3$  باشد. سلطان اگر هیچ گولی را نکشد، به راحتی به هدف خود می‌رسد. پس در  $k = 3$  الگوریتم تضمینی وجود دارد.

برای  $k = 2$ ، سلطان باید ۳ گول چپ‌گرا را بکشد. مانند حالت  $k = 4$ ، گول‌ها را ۳ دسته می‌کنیم. سلطان اگر در هر دسته، نخستین گول چپ‌گرایی که می‌توانست بکشد را بکشد، به هدف خود خواهید رسید. پس در  $k = 2$  الگوریتم تضمینی وجود دارد. پس پاسخ برابر  $2(2 - k) = 3$  است.

۲۳- گزینه‌ی ۱ درست است.

جمع بدون سرریز در مبنای دو یعنی همان XOR. برای حل سؤال همچون تمام جمع‌ها بازه‌ای اند می‌توانیم از ایده‌ی جمع پیشوندی prefix sum استفاده کنیم و به ازای هر تکرار در XOR پیشوندی این اعداد، یک بازه داریم که جمعش صفر است. برای چک کردن نمایش دودویی و در کنارش جمع پیشوندی آن‌ها آمده:

| Array | binary | Prefix XOR |
|-------|--------|------------|
|       |        | ۰۰۰        |
| ۵     | ۱۰۱    | ۱۰۱        |
| ۶     | ۱۱۰    | ۰۱۱        |
| ۵     | ۱۰۱    | ۱۱۰        |
| ۴     | ۱۰۰    | ۰۱۰        |
| ۷     | ۱۱۱    | ۱۰۱        |
| ۵     | ۱۰۱    | ۰۰۰        |
| ۳     | ۰۱۱    | ۰۱۱        |
| ۴     | ۱۰۰    | ۱۱۱        |
| ۷     | ۱۱۱    | ۰۰۰        |
| ۵     | ۱۰۱    | ۱۰۱        |
| ۳     | ۰۱۱    | ۱۱۰        |

پس ۳ بار ۰۰۰ تکرار شده و ۳ بار ۱۰۱ و دو بار ۰۱۱ و دو بار ۱۱۰ و دوتای دیگر فقط یک بار آمده‌اند:

$$3 + 3 + 1 + 1 = 8$$

۲۴- گزینه‌ی ۴ درست است.

تعداد خانه‌های سیاه ثابت (۸ تا) می‌ماند. از طرفی می‌توان الگوریتمی داد که به هر جدول با ۸ خانه‌ی سیاه رسید. پس پاسخ برابر

۱۶  
۸ است.

**۲۵- گزینهی ۵ درست است.**

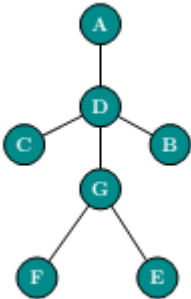
زوجیت تعداد خانه‌های سیاه باقی می‌ماند. از طرفی می‌توان الگوریتمی داد که به هر جدول با تعداد زوج خانه‌ی سیاه رسید. تعداد چنین جدول‌هایی نیز  $2^{16-1}$  است. پس پاسخ برابر  $2^{15}$  است.

**۲۶- گزینهی ۳ درست است.**

خانه‌های گوشه، مستقلاً می‌توانند تغییر کنند. پس  $2^4$  حالت دارند. خانه‌های سفید ابتدایی تنها با یکدیگر و خانه‌های سیاه ابتدایی نیز تنها با یکدیگر تغییر می‌کنند. پس کافی است حالات یکی از آن‌ها را حساب کنیم. خانه‌های سفید ابتدایی به جز گوشه‌ها، ۶ خانه هستند که با حالت‌بندی ۱۶، به ۱۶ حالت می‌توانند برسند. پس پاسخ برابر  $2^{12} = 16^3$  است.

**۲۷- گزینهی ۲ درست است.**

رأس‌ها را به شکل رو به رو نام‌گذاری می‌کنیم.



نمایش عدد رأس D در مبنای دو را برابر با  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$  در نظر می‌گیریم. عدد رأس‌های C, G, A, B باید دقیقاً در یک بیت با D اختلاف داشته باشند و رأس‌های A, B, C با هم تفاوتی ندارند. پس تا اینجا  $4 \times 4 \times 64$  حالت داریم. عدد E و F در یک بیت با G متفاوت‌اند و به خاطر اینکه E و F نباید به A, B, C, D, A, B, C, D, A, B, C, D یال داشته باشند تنها در دو بیت خاص می‌توانند با G فرق کنند و از آن جایی که E و F در شکل تفاوتی ندارند این دو عضو یکتا معلوم می‌شوند. پس جواب نهایی برابر با  $4 \times 4 \times 64 = 3840$  است.

**۲۸- گزینهی ۵ درست است.**

ادعا می‌کنیم عدد هر آدمک برابر با نقیض عدد D است. برای اثبات ادعا اول ترتیب بیت‌ها را جوری تغییر می‌دهیم که اختلاف A و B و C و G با D به ترتیب در بیت‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ باشند و تفاوت F و E با G در بیت‌های ۵ و ۶ باشند.

$$D = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$B = (a_1, \overline{a_2}, \overline{a_3}, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$C = (a_1, a_2, a_3, \overline{a_4}, a_5, a_6)_2$$

$$G = (a_1, a_2, a_3, \overline{a_4}, \overline{a_5}, a_6)_2$$

$$E = (a_1, a_2, a_3, \overline{a_4}, a_5, \overline{a_6})_2$$

$$F = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \overline{a_6})_2$$

با توجه به اینکه به ازای هر بیت در D نقیض آن فرد بار آمده و خود آن زوج بار، XOR همه‌ی اعداد در نهایت برابر با نقیض D خواهد بود. با توجه به سؤال قبل داریم که به ازای هر D دل‌خواه  $4 \times 4$  حالت مختلف داریم. پس مجموع عدد همه‌ی آدمک‌ها برابر است با:

$$\sum_{x=0}^{63} x \times 4 \times 4 = \frac{64}{2} \times 4 \times 4 = 12096$$

**۲۹- گزینهی ۴ درست است.**

تعداد گره‌های موجود در هر زیر درخت با این خاصیت برابر با توانی از دو است. به صورت دقیق‌تر تعداد گره‌های یک درخت که ریشه‌ی آن k فرزند دارد برابر با  $2^k$  می‌باشد. فرزند سوم هفت فرزند خواهد داشت و در نتیجه در این زیر درخت  $2^7$  گره وجود خواهد داشت.



۳- گزینه‌ی ۲ درست است.

برای این که مسیر به طول ۱۹۸ داشته باشیم این مسیر حتماً باید از ریشه عبور کند. همچنین می‌دانیم یک سر مسیر باید در زیر درخت اول ریشه قرار داشته باشد (در غیر این صورت طول مسیر کم‌تر از ۱۹۸ خواهد بود).  
لم. در درختی که ریشه‌ی آن  $k$  فرزند داشته باشد، تعداد رأس‌های به عمق  $k - 1$  برابر  $k$  می‌باشد.  
اگر مسیر از عمیق‌ترین برگ زیر درخت اول شروع شود وقتی به ریشه می‌رسد، طولش برابر ۱۰۰ خواهد بود. در این صورت اگر به زیر درخت دوم برود طبق لم ۹۸ حالت برای ادامه مسیر وجود دارد و اگر به زیر درخت سوم برود، یک حالت برای ادامه مسیر وجود خواهد داشت. پس اگر مسیر از عمیق‌ترین برگ در زیر درخت اول شروع شود ۹۹ حالت وجود خواهد داشت.  
همچنین اگر مسیر از یک رأس در عمق ۹۹ شروع شود وقتی به ریشه می‌رسد، طول ۹۹ خواهد داشت و تنها می‌تواند به عمیق‌ترین رأس در زیر درخت دوم برود. چون طبق لم برای شروع مسیر ۹۹ رأس کاندیدا داریم در این حالت نیز ۹۹ مسیر به دست می‌آید. پس پاسخ صحیح  $۹۹ + ۹۹ = ۱۹۸$  است.